

Piste di lavoro per EM.MA 2010:

Focus su due processi cognitivi

a) *Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e saper passare dall'una all'altra*



b) *Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico: congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare.*



L'APPRENDIMENTO EFFICACE IN MATEMATICA

1. Costruire concetti (**noetica**)
2. Saperli usare per effettuare calcoli (**apprendimento algoritmico**)
3. Combinarli con altri e
con strategie per risolvere problemi (**apprendimento strategico**),
4. Saper spiegare a se stessi e agli altri il concetto costruito
e la strategia seguita (**apprendimento comunicativo**)
5. Saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che
permettono di passare da una rappresentazione all'altra
(**apprendimento semiotico**)

a) Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e saper passare dall'una all'altra

Si tratta di una competenza fondamentale in matematica, ma non solo. Nella vita di tutti i giorni è diventato cruciale saper mettere in atto questo processo cognitivo ad esempio per leggere un giornale o per capire messaggi espressi in forme diverse.



a) Non c'è Noetica senza Semiotica!

“Il coordinamento di registri diversi è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto è la condizione per una differenziazione reale tra oggetti matematici e la loro rappresentazione”
(Duval, 1995)



0,5



50%

Quel che si impara a maneggiare in
matematica non sono tanto gli oggetti
quanto le loro **rappresentazioni** anche
se l'obiettivo è l'apprendimento
concettuale (noetica)



$1/2$

5×10^{-2}

ESEMPIO: STESSO REGISTRO

**D10. In una scuola con 300 allievi, 45 tifano per la squadra del Borgorosso.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?**

- ☐ A. Un ragazzo su 6 è tifoso del Borgorosso.
- ☐ B. I tifosi del Borgorosso sono il 25% degli allievi.
- ☐ C. I tifosi del Borgorosso sono il 15% degli allievi.
- ☐ D. Un quinto degli allievi è tifoso del Borgorosso.

Interpretare e
confrontare le
seguenti
rappresentazioni.

Uno su 6

25% di...

15% di...

Un quinto



Attività: ricerca sulla stampa di informazioni
presentate con rappresentazioni diverse.

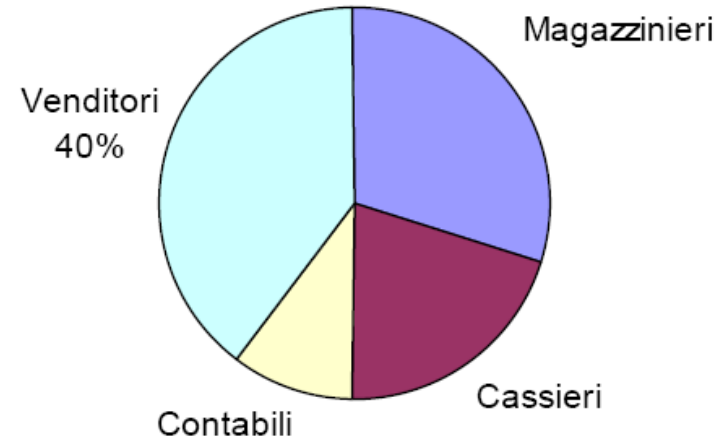
**Prova Nazionale 2009
Numeri**

ESEMPIO : REGISTRI DIVERSI

Coordinamento tra rappresentazioni SEMIOTICHE diverse

C21. In una grande libreria gli impiegati sono così suddivisi:

Mansione	Numero di impiegati
Magazzinieri	?
Cassieri	4
Venditori	8
Contabili	2



Qual è il numero dei magazzinieri?

Risposta _____

**Prova Nazionale 2008
Dati**

Le strategie risolutive possono essere diverse, ma tutte implicano di passare da una rappresentazione all'altra: percentuali, grafico e tabella

L'allievo ha **raggiunto apprendimento concettuale** quando è in grado di

- a) **Scegliere** tratti distintivi di un concetto e rappresentarli in un dato registro
- b) **Trattare** tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro
- c) **Convertire** tali rappresentazioni da un registro all'altro

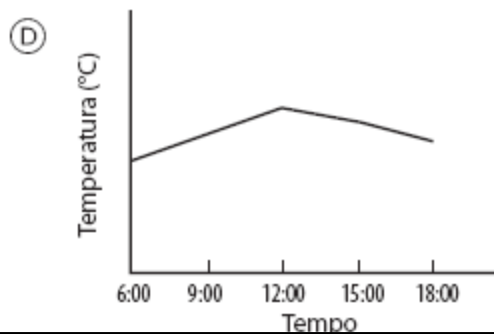
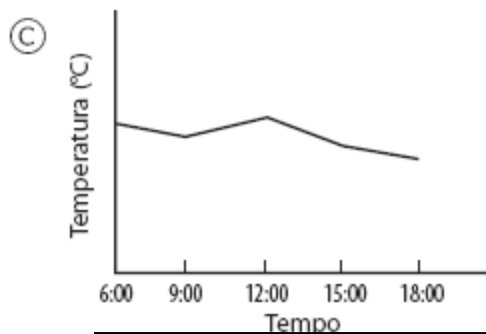
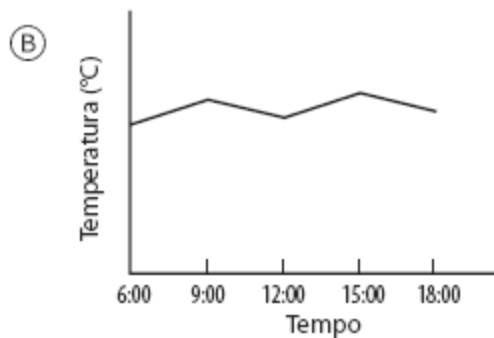
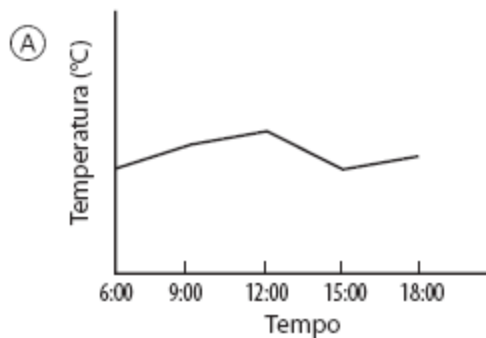
EMergenza MAtematica



La tabella riporta le temperature di un certo giorno registrate ad ore diverse.

Ora	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00
Temperatura °C	12	17	14	18	15

Si disegna quindi un grafico senza riportare la scala delle temperature. Quale, fra i seguenti, potrebbe essere il grafico che mostra le informazioni riportate nella tabella?



Si tratta di leggere la tabella in termini di “aumenti” e “diminuzioni” di temperatura e sulla base di questo scegliere il grafico corretto

TIMSS 2007
Modellizzazione



Attività: Spiega perché i grafici che hai scartato non vanno bene

x metri

Il primo tubo è lungo x metri e il secondo tubo è lungo y volte il primo. Quanto è lungo il secondo tubo?

- (A) xy metri.
- (B) $x + y$ metri.
- (C) $\frac{x}{y}$ metri.
- (D) $\frac{y}{x}$ metri.

Si tratta di scegliere la formula, tra quelle date, che esprime ciò che è descritto a parole

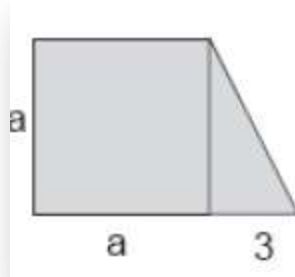


Attività: Spiega perché le formule che hai scartato non vanno bene

TIMSS 2007
Relazioni

Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui di fianco, al variare della lunghezza a .

$A =$ _____



Quale di queste formule **NON** esprime l'area del trapezio qui a fianco?

☐ $a^2 + 3a/2$

☐ $(3 + a + a) \times a / 2$

☐ $(3a + a) \times a / 2$

<http://scuola.zanichelli.it/online/quartaprova/>

La richiesta cambia. L'accento è sul passaggio da una rappresentazione all'altra, dalla formula “standard” ad un'altra espressa in modo diverso.

COSA POTER FARE IN CLASSE?



Suggerimenti:

- A. Confrontare rappresentazioni diverse (tabelle, grafici, scritture algebriche..), lettura, analisi dei punti di forza e delle criticità.
- B. Confrontare scritture diverse di un numero: cifre, parole, scrittura polinomiale, traduzione algebrica
- C. Scegliere una rappresentazione adatta per una certa situazione: grafico a torta o a barre. Quando è meglio usare uno o l'altro
- D. Confrontare formule di aree scritte in modo diverso
- E. In geometria dal testo alla figura e viceversa

*Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico:
congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare,.....*

Si tratta di una competenza che va costruita fin dai primi anni di scuola e comprende tutte quelle attività legate alla esplicitazione dei procedimenti seguiti, alla formulazione di ipotesi, alla produzione di congetture, al riferimento alla matematica nella sua **funzione culturale**. Pochissimi gli esempi e ancora troppo esigua la prassi didattica



L'argomentazione è il fulcro dell'attività
comunicativa.

I processi argomentati agevolano
l'assunzione di consapevolezza e
contribuiscono alla padronanza di
concetti matematici.

Lo sviluppo delle capacità argomentative porta a obiettivi che si attestano su due livelli, **cognitivo e metacognitivo** con implicazioni **di tipo sociale**.

Cognitivo:

- ☐ formulare e verificare ipotesi
- ☐ generalizzare
- ☐ astrarre
- ☐ comprendere e utilizzare un linguaggio specifico

Metacognitivo

- ☐ Favorisce il passaggio dalle **nozioni intuitive** e dai livelli operativi a forme di **pensiero più consapevoli**
- ☐ Favorisce la riflessione
- ☐ Esplicitare percorsi di pensiero e ragionamento
- ☐ Argomentare secondo i propri punti di vista
- ☐ Sviluppare un pensiero **divergente, critico e creativo**

Sociale:

- ☐ Esprimere e comprendere diversi punti di vista
- ☐ Aiuta a confrontare il proprio punto di vista con quello degli altri
- ☐ Ascoltare cogliendo le risorse degli altri
- ☐ Favorire il confronto dialogico costruttivo
- ☐ Sostiene la crescita di un cittadino critico e propositivo

“Il ragionamento non è quindi un modo per arrivare alle idee, ma **piuttosto un modo per vagliare criticamente le idee**”(Toulmin)

Valore ETICO dell'Argomentazione


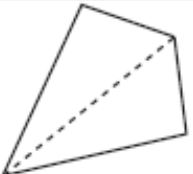
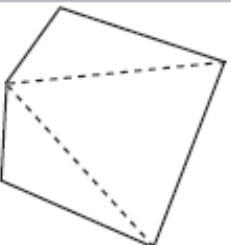
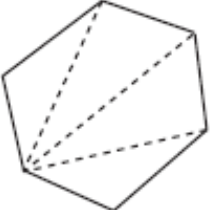
- Perché gli allievi riconoscano il **peso concreto delle parole**
- Perché capiscano che alle **parole corrispondono azioni e intenzioni**, che si può agire con il discorso, proprio perché gli enunciati “vincolano”
- Perché comprendano che occorre **essere responsabili di ciò che si dice o non si dice**
- Perché inizino a vedere le **implicazioni pratiche delle teorie**

(da F. Ferri- Paderno 2009)

Angoli interni

Giacomo studia le proprietà dei poligoni. Giacomo ha preparato la tabella seguente per vedere se è possibile trovare un collegamento tra i lati e gli angoli.

A. Completa la tabella riempiendo gli spazi vuoti.

Poligono	Numero di lati	Numero di triangoli	Somma degli angoli interni
	3	1	$1 \times 180^\circ$
	—	—	— $\times 180^\circ$
	—	—	— $\times 180^\circ$
	—	—	— $\times 180^\circ$

E' un problema “classico”: si richiede di continuare la sequenza, indicando tuttavia una pista di lavoro molto precisa: il numero dei triangoli che si formano con le diagonali che escono da un unico vertice.

Caso particolare $l=10$

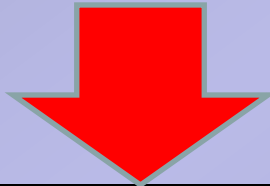
TIMSS 2007
Relazioni

Somma degli angoli interni di un poligono con 10 lati = $\times 180^\circ$

Giacomo ha notato una sequenza ed è stato in grado di scrivere un'espressione, utilizzando n , vera per qualsiasi poligono. Completa ciò che ha scritto.

Somma degli angoli interni di un poligono con n lati = _____ $\times 180^\circ$

Si richiede una
generalizzazione
della regola

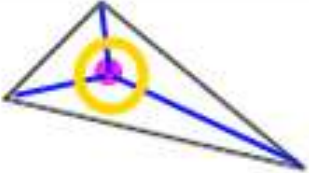
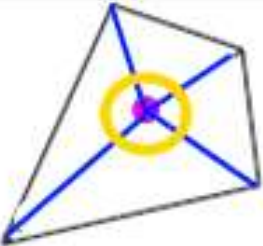
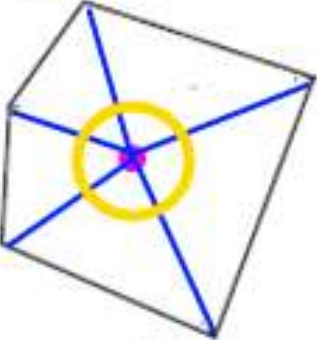
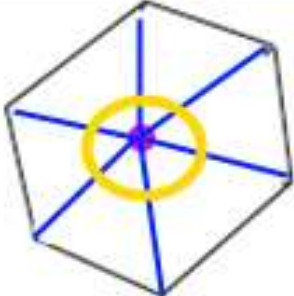


Attività: Giuseppe ha elaborato questa formula

Somma angoli interni poligono n lati = $n \times 180 - 360$

Come potrebbe aver ragionato Giuseppe? Prova a motivare la sua proposta?

Rappresenta poi con le figure della tabella precedente il percorso fatto da Giuseppe

Poligono	Numero di lati	Numero di triangoli	Somma degli angoli interni
	3	3	3×180 $- 360$
	<u>4</u>	<u>4</u>	4×180 $- 360$
	<u>5</u>	<u>5</u>	5×180 $- 360$
	<u>6</u>	<u>6</u>	6×180 $- 360$

RIFIUTI

Domanda 1: RIFIUTI

M505Q01 - 0 1 9

Nell'ambito di una ricerca sull'ambiente, gli studenti hanno raccolto informazioni sui tempi di decomposizione di diversi tipi di rifiuti che la gente butta via:

Tipo di rifiuto	Tempo di decomposizione
Buccia di banana	1-3 anni
Buccia d'arancia	1-3 anni
Scatole di cartone	0,5 anni
Gomma da masticare	20-25 anni
Giornali	Pochi giorni
Bicchieri di plastica	Oltre 100 anni

PISA 2003
Incertezza

Uno studente prevede di presentare i risultati con un diagramma a colonne.

Scrivi **un** motivo per cui un diagramma a colonne non è adatto per rappresentare questi dati.

Attività: E' possibile rappresentare questi dati con un diagramma qualsiasi? Se SÌ quale? Se NO perché?

Descrizione item

Idea chiave: incertezza

Livello di difficoltà dell'item: 551 (Livello 4 sulla scala complessiva di *literacy* in matematica)

Punteggio pieno

Codice 1: Fornisce un motivo che si fonda sulla grande variazione dei dati.

- La differenza tra le altezze delle colonne del diagramma sarebbe troppo grande.
- Se si fa una colonna con un'altezza di 10 centimetri per la plastica, quella per le scatole di cartone sarà di 0,05 centimetri.

OPPURE Fornisce un motivo che si fonda sulla variabilità dei dati per alcune categorie.

- L'altezza della colonna per "bicchieri di plastica" è indeterminata.
- Non si può fare una colonna per 1-3 anni e una colonna per 20-25 anni.

Nessun punteggio

Codice 0: Altre risposte

- Perché non funzionerà.
- Un pittogramma è meglio.
- Non si possono verificare le informazioni.
- Perché i numeri nella tabella sono solo approssimazioni.

Codice 9: Non risponde

	Italia	OCSE
Corretta	34,9%	50,5%
Errata	26,2%	31,4%
Omessa	26,2%	16,1%

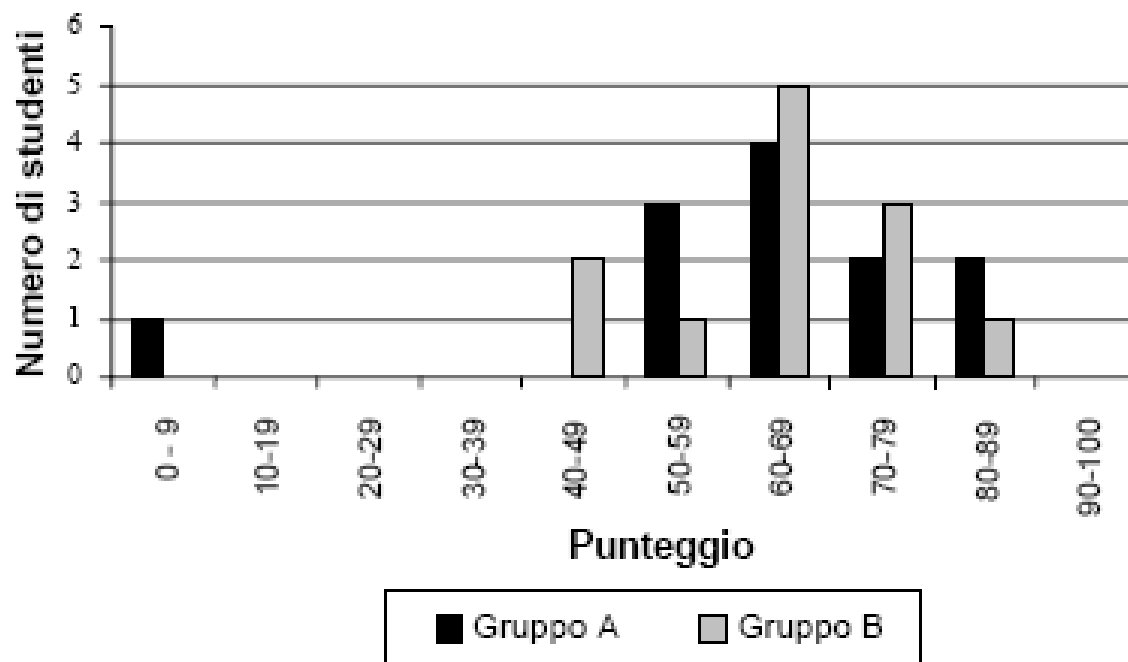
Domanda 1: RISULTATI DI UNA VERIFICA

M513Q01 - 0 1 9

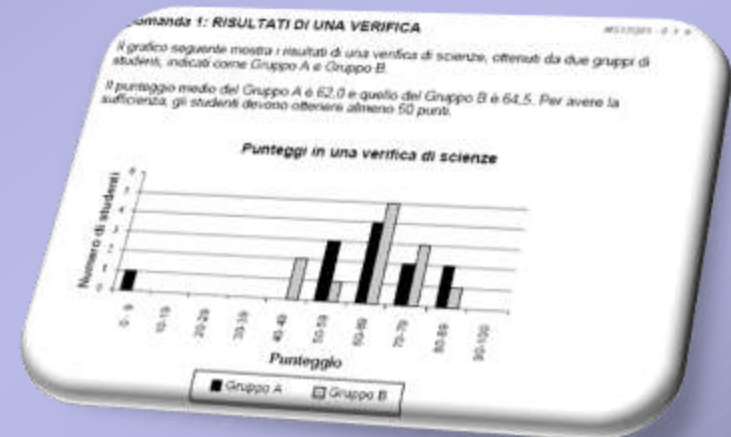
Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B.

Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5. Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50 punti.

Punteggi in una verifica di scienze



PISA 2003
Incertezza



In base a questo grafico, l'insegnante sostiene che, nella verifica, il Gruppo B è andato meglio del Gruppo A.

Gli studenti del Gruppo A non sono d'accordo con l'insegnante. Essi cercano di convincere l'insegnante che il Gruppo B non è necessariamente andato meglio.

Con l'aiuto del grafico, suggerisci agli studenti del Gruppo A una spiegazione matematica che potrebbero usare.

RISULTATI DI UNA VERIFICA: INDICAZIONI PER LA CORREZIONE D1

Punteggio pieno

- Codice 1: Suggerisce una spiegazione valida. Spiegazioni valide potrebbero riguardare il numero di studenti che hanno superato la verifica, l'influenza negativa sulla media dell'unico studente che va molto male, oppure il numero di studenti con punteggi molto alti. :
- Più studenti del Gruppo A hanno superato la verifica rispetto a quelli del Gruppo B.
 - Se si ignorano gli studenti meno bravi del Gruppo A, gli studenti del Gruppo A vanno meglio di quelli del Gruppo B.
 - Più studenti del Gruppo A rispetto agli studenti del Gruppo B hanno ottenuto un punteggio di 80 o superiore

Nessun punteggio

- Codice 0: Altre risposte, comprese risposte errate, spiegazioni matematiche errate, oppure risposte che descrivono semplicemente alcune differenze ma non sono argomenti validi da giustificare che il Gruppo B potrebbe non essere andato meglio.
- Normalmente gli studenti del gruppo A vanno meglio degli studenti del Gruppo B in scienze. I risultati di questa verifica sono solo una coincidenza.
 - Perché la differenza tra i punteggi più alti e quelli più bassi è minore per il gruppo B rispetto al Gruppo A.
 - Il Gruppo A ha migliori risultati nell'intervallo di punteggio 80-89 e in quello 50-59.
 - Il Gruppo A ha un maggiore intervallo interquartile rispetto al Gruppo B.

- Codice 9: Non risponde

PISA 2003

Risposte Corrette	Italia 15,3%	OCSE 31,3%
-------------------	--------------	------------

Omissioni	Italia 54,7%	OCSE 34%
-----------	--------------	----------



Suggerimenti

- A. Scegliere un procedimento risolutivo di un problema non banale. Lo scopo non è tanto quello di risolvere il problema, ma di selezionare il procedimento corretto. E' anche un modo per imparare a scrivere procedimenti
- B. Scegliere una spiegazione risolutiva di un problema (senza i calcoli)
- C. Giustificare una strategia di soluzione, un'affermazione,...
- D. Scegliere una parafrasi corretta di una affermazione
- E. Scegliere una o più argomentazioni corretta fra diverse date

Cominciare a lavorare in classe su questi due processi cognitivi

➤ **RAPPRESENTAZIONI DIVERSE**

➤ **ARGOMENTARE**

Intrecciandole con un altro processo chiave:

RISOLUZIONE DI PROBLEMI

Un venditore di automobili ha pubblicato su un giornale la seguente pubblicità:
"Vecchie e nuove automobili in vendita a prezzi diversi, prezzo medio 5.000 zed."

Leggendo la pubblicità quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Ⓐ La maggior parte delle automobili costa fra 4.000 e 6.000 zed.
- Ⓑ Metà delle automobili costa meno di 5.000 zed e metà costa più di 5.000 zed.
- Ⓒ Almeno una automobile costa 5.000 zed.
- Ⓓ Alcune automobili costano meno di 5.000 zed.



Spiega con esempi perché le affermazioni che hai scartato non vanno bene

TIMSS 2007
Relazioni

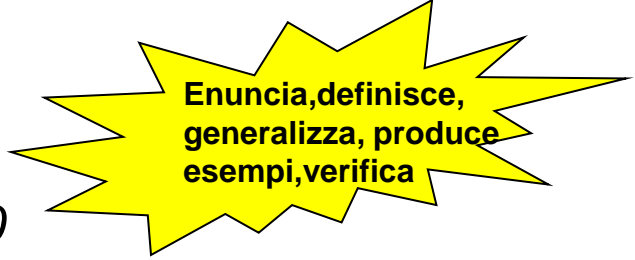
Un esempio IV elementare

“Se si aggiunge 1 ad un numero **qualsiasi** si ottiene **sempre** il successivo.

$2+1=3$ 3 è il successivo di 2

$8+1=9$ 9 è il successivo di 8

$1000+1=1001$ 1001 è il successivo di 1000



Enuncia, definisce,
generalizza, produce
esempi, verifica

Succede questo perché la nostra numerazione è fatta proprio con +1. Tu parti da 0 e aggiungi 1 e hai il numero 1, poi aggiungi 1 e hai il numero 2, poi aggiungi 1 e hai il numero 3 e così via senza finire mai. Quando bisogna scrivere il successivo di un numero tu devi fare +1 e lo trovi. In quei numeri che ci hai dato se aggiungi +1 a tutti tu hai **tutti i successivi** di quei numeri lì: 4-13-10-167-6-1254-9. Questo che succede è come un gioco dove le regole valgono per tutti quelli che giocano e tutti le devono rispettare. Se aggiungi 1 a tutti trovi per tutti il successivo perché con +1 **non esiste** un altro numero diverso dal successivo e nessuno può barare.”
(Marcello)

YILENI, Addis Abeba 2005

Se applico la trasformazione +uno (1) tutti i numeri che sono PARI si trasformano cioè diventano DISPARI, e se aggiungo uno (1) a un numero DISPARI si trasforma a un numero PARI,

perché i numeri sono alternati a DISPARI a PARI, cioè il numero 1 è DISPARI e il numero 2 è PARI e così avanti i numeri sono sempre alternati.

Per esempio 1,5,19,15 e 31 sono numeri DISPARI e se aggiungo + 1 a tutti questi numeri diventano PARI, si trasformano così 1-2,5-6,19-20, 15-16, 31-32.

Tutti i numeri PARI che sono 6,18,24 se gli aggiungo +1 diventano DISPARI. Li trasformo così 18-19, 6-7, 24-25. Io ho capito così dalla mia osservazione.

La regola è così $D+1=P$ $P+1=D$ $D-1=P$ $P-1=D$

Congettura



Argomentazione

Esplorazione

Generalizzazione



Grazie